УДК 372. 016: 51(075.8)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ «ЗАДАЧИ-КЛОНЫ»: СУЩНОСТЬ, ДИДАКТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ПРИЕМЫ СОСТАВЛЕНИЯ

Менькова С.В.

*ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского», Арзамасский филиал, Арзамас, Россия (607220, ул.К.Маркса, 36),*svetlana.menckova@yandex.ru

В статье выявляется сущность понятия «задача-клон» и предпринимается попытка дать определение этому термину. Под задачами-клонами предлагается понимать задачи, идентичные по сложности, способу решения и теоретическому базису, равноценные или близкие по трудности, отличающиеся числовыми данными, обозначениями, расположением объектов, наименованием нематематических объектов задачи. Основное предназначение «задач-клонов» — организация контроля знаний, как внешнего, так и самоконтроля. Кроме того, решение «задач-клонов» способствует формированию у учеников математических умений и навыков. В результате проведенного исследования выявлены основные приемы составления(клонирования) задач, к которым относятся: варьирование числовых данных, обозначений, расположений объектов, изменения нематематических объектов в сюжете задачи. Особо подчеркнуто, что данные изменения не должны приводить к более трудоемким вычислениям, к частным случаям, когда у объекта появляются новые свойства, использование которых изменяет базис решения.

Ключевые слова: задача-клон, варьирование задачи

MATHEMATICAL «TASK –CLONES»: NATURE, DIDACTIC FUNCTIONS, METHODS OF CREATION

Menkova S.V.

Arzamas Branch of Nizhny Novgorod State University, Arzamas, Russia (607220, K.Marx, 36), svetlana.menckova@yandex.ru

The article reveals the essence of the concept of «task–clone»,we attempted to define the term. Under tasks-clones we understand the tasks, identical in complexity method solutions, theoretical basis, equivalent or similar in difficulty, different numeric data symbols, the location of objects, names non-mathematical objects. The main didactic function of the «tasks-clones»is an organization of knowledge control. In addition, the task-"clones" promotes the formation of mathematical skills. We identified the main techniques of cloning tasks: the variation of numerical data, symbols, locations of objects, changes in non-mathematical objects in the text of the task. Moreover, these changes should not lead to more difficult computations, to the particular case, in which the basis for decisions changes.

Keywords: "task -clone",variation of the task

Термин «клон» появился в начале 60-х годов прошлого столетия в связи с исследованиями в области генетики для обозначения организмов и/или групп клеток, полученных от одного исходного организма, генетически идентичных друг другу и родительскому организму. Впоследствии термин стали заимствовать и другие науки, наполняя своим содержанием, однако, сохраняя его первоначальное семантическое значение – точная копия, допуская лишь «незначительные синтаксические отличия». Сравнительно недавно термин «клон» стали использовать и в сфере образования, в частности, в области методики математики. В условиях активного усиления внимания к тестовой форме проверки знаний, увеличения использования тестов в процессе обучения, и в связи с введением ЕГЭ возникла необходимость разработки большого количества однотипных задач, которые все чаще стали называть «клонами». Следует заметить, что, хотя термин «задача-клон» встречается нередко, сама дефиниция еще достаточно точно не определена.

Цель исследования: выявить сущность понятия «задача-клон» и предложить свой вариант дефиниции, охарактеризовать функции задач-клонов в обучении математике, выявить приемы составления математических задач-клонов.

Основное предназначение задач-клонов - это, изначально, организация контроля знаний, как внешнего, так и самоконтроля. Их применение позволяет индивидуализировать контроль и исключить списывание. В этом случае, каждый ученик решает свою задачу, при этом задачи у всех одинаковой трудности. Помимо контрольно-диагностирующей функции задачи-клоны выполняют обучающую, тренировочную функцию. Однотипные задачи традиционно использовались и используются в практике обучения математике для формирования умений и прочных навыков. В школьном курсе математики есть темы, для прочного усвоения которых школьникам приходится решить достаточно большое число задач, различающихся практически только числовыми данными. Причем, количество задач, требуемых для усвоения темы, для каждого ученика индивидуально, в зависимости от его интеллектуальных способностей и обучаемости. Однако, не стоит чрезмерно увлекаться решением многочисленных клонов одной задачи, дабы не превратить процесс усвоения учебного материала в «натаскивание», заучивание решений.

На первый взгляд может показаться, что «клоны» существуют только у достаточно простых задач. Однако это не так: среди заданий части С – ЕГЭ (совсем не простых для учеников) много примеров задач-клонов, в числе которых и неравенства, и уравнения, и планиметрические, и стереометрические задачи, и даже задачи, которые относят к категории олимпиадных. Решение задач такого уровня обладает мощным развивающим потенциалом.

Для школьников полезно вовлечение их в работу по составлению задач-клонов. Как отмечают Л.И. Звавич и Е.В. Потоскуев [3] такая работа развивает творческую активность учеников, способствует выработке у них умений и навыков быстрого нахождения связей между решенными и новыми, более трудными задачами.

Называя задачи «клонами», обычно подразумевают их однотипность, «похожесть условий». Для определения характерных особенностей (сущности) задач-клонов мы будем опираться на исследования Ю.М. Колягина [5], который выделяет в структуре задачи следующие компоненты: А –начальное состояние (условие задачи); В –конечное состояние (требование), R - способ преобразования условия задачи для нахождение искомого, С – базис решения (теоретическое обоснование решения). В задачах-клонах должны оставаться неизменными требование, способ преобразования условия задачи для нахождения искомого, базис решения (теоретическое обоснование решения). Незначительные изменения наблюдаются в условии задачи. Причем, различия условий задач-клонов не касается характера взаимосвязей, отношений между величинами, объектами, данными в условии. Попытка выявления характера изменений условия задачи, при ее клонировании, предпринята ниже.

При характеристике математических задач, используемых в обучении, говорят об их сложности и трудности, как правило, разграничивая эти понятия. Сложность задачи считают ее объективной характеристикой, характеристикой ее структуры. Сложность задачи принято связывать с числом умственных операций, которые необходимо совершить для её решения, с числом элементарных подзадач, входящих в нее. При клонировании изменения сложности задачи не происходит. Трудность задачи – субъективная характеристика, зависящая от ее сложности, обобщенности характера ее формулировки. Опираясь на исследования ученых[8] и опыт учителей практиков, можно сделать вывод, что уровень трудности задачи для решающего зависит как от степени новизны задачной ситуации, так и от его интеллектуальных способностей уровня подготовленности (имеющихся знаний, сформированности умений применять частные и общие приемы и методы решения задач). Существуют разные методики для оценки трудности, учитывающие различные параметры. Так, А.А.Столяр, указывая на связь между трудностью и сложностью задачи, предлагает приближенно оценивать трудность задачи следующим образом: трудность конкретной задачи (для данных учащихся) равна сложности этой задачи без сложности ранее решенных этими учащимися задач-компонент [6]. Существует и чисто эмпирический подход: чем меньше правильных ответов, тем труднее задание – именно его часто используют в теории педагогических измерений. Одним из параметров, определяющих трудность задачи, является время, затраченное на ее решение. Мы разделяем позицию методистов, считающих, что клонирование задачи не должно вести ни к теоретическому, ни к серьезному техническому усложнению задачи [3].

По сути, задачи-клоны это задачи-аналоги, где аналогия выступает на уровне подобия. Как подобные фигуры в математике имеют полностью одинаковую структуру и отличаются лишь размерами, так и задачи-клоны, чаще всего, отличаются друг от друга только числовыми данными.

Например. Задача 1. Объем треугольной пирамиды SABC, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды SABCDEF, равен 1. Найдите объем шестиугольной пирамиды. [8].

Задача 2. Объем треугольной пирамиды SABC, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды SABCDEF, равен 6. Найдите объем шестиугольной пирамиды.

В условиях этих задач единственное отличие - числовое значение величины. Такие задачи-клоны получают с помощью варьирования числовых значений величин [2].

Рассмотрим еще один пример задач-клонов.

Задача 1. В сборнике билетов по биологии всего 55 билетов, в 11 из них встречается вопрос по ботанике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по ботанике.

Задача 2.В сборнике билетов по химии всего 25 билетов, в 6 из них встречается вопрос по углеводородам. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по углеводородам.

В задачах 1 и 2 кроме варьирования значений двух величин есть незначительные изменения сюжета (не влияющее на математическую сущность задачи). Можно привести немало примеров таких изменений: изменение имен героев, названий объектов и т. п. Подобные изменения условия – одна из «хитростей» учителей, рассчитанная на «нерадивых» учеников. Для учеников, с трудом усваивающих материал, простое изменение действующих лиц в сюжете (например, вместо «два брата», – «мальчики Миша и Саша») может сделать задачу совершенно неузнаваемой.

В геометрических задачах при клонировании кроме варьирования числовых данных используют также варьирование обозначений (например, изменение названия фигуры ΔABC, ΔKMP), незначительное варьирование чертежа (например, изменение расположения геометрического объекта, изменение формы объекта, не вызывающее изменение способа решения задачи).

Итак, под термином «задачи-клоны» мы предлагаем понимать задачи, одинаковые по сложности, способу решения, теоретическому базису, равноценные или близкие по трудности, и отличающиеся друг от друга числовыми данными, обозначениями, расположением объектов, наименованием нематематических объектов задачи.

Рассмотрим три неравенства — внешне они отличаются только числовыми данными:1) $2x^2+x+1\geq 0$, 2) $2x^2+x-2\geq 0$, 3) $2x^2+x-1\geq 0$.

Можно ли считать их задачами-клонами? Неравенства получились разной трудности: у квадратного трехчлена в третьем неравенстве дискриминант – точный квадрат, получаются целые корни, а во втором, корни трехчлена содержат радикалы. Для учеников это задание труднее. У квадратного трехчлена, стоящего в левой части первого неравенства дискриминант отрицательный, а у второго и третьего – положительный. Это разные случаи решения неравенств. На практике замечено, что при решении первого неравенства ученики допускают гораздо больше ошибок, чем при решении третьего неравенства.

Рассмотрим еще примеры задач, полученных варьированием числовых данных.

Задача 1. Известны длины трех сторон треугольника: a=3, b=5, c=7. Вычислить площадь треугольника. (Наиболее рациональный способ решения – применение формулы Герона для нахождения площади треугольника.)

Задача 2. Известны длины трех сторон треугольника: a=3, b=4,c=5. Вычислить площадь треугольника.

При данных значениях длин сторон треугольник оказывается прямоугольным. В этом случае площадь треугольника легко находится через произведение катетов. Таким образом, изменился способ решения, базис (т.е. теоретическая основа решения).

Задача 3. Известны длины трех сторон треугольника: a=$\sqrt{3}$,b=4, c=5. Вычислить площадь треугольника. (В этой задаче применение формулы Герона приведет к громоздким вычислениям, а потому вряд ли оправдано.)

Задача 4. Известны длины трех сторон треугольника: a=1,b=4, c=5. Вычислить площадь треугольника. (А эта задача вообще не имеет решения. Поскольку не существует треугольник с такими длинами сторон. Это задача – провокация.)

Таким образом, рассмотренные выше задачи – пример явно неудачно клонирования задач путем варьирования числовых данных.

Варьирование числовых данных не всегда приводит к задачам одинаковой трудности. Трудность задачи для ученика изменяется, если, например, однозначные натуральные числа, или числа, кратные 10, заменить двузначными, трехзначными числами, не кратными 10; если вместо целых чисел использовать дробные, иррациональные числа и т. д.

При клонировании варьирование не должно приводить к появлению частного случая, т.е. объекта, обладающими свойствами, которыми не обладали объекты с другими числовыми характеристиками. Например, прямоугольный треугольник с углом 30 градусов, равнобедренные и равносторонние треугольники обладают рядом свойств, которыми не обладают произвольные треугольники. Использование их в условии задачи приведет к изменению базиса решения, чаще всего к значительному упрощению решения.

Рассмотренные выше примеры подводят нас к выводу, что для получения задач-клонов одинакового уровня трудности варьирование числовых данных не может быть совершенно произвольным. Изменение числовых данных не должно приводить к более трудоемким вычислениям или к некоторому частному случаю, при котором у объекта появляются новые свойства, упрощающие решение; к изменению теоретической основы решения (когда рациональнее использовать другой способ решения) и т.д. Таким образом, специфика содержания задания (теоретический базис) накладывает определенные условия и ограничения на допустимые значения варьируемых величин при клонировании задач.

При составлении задач-клонов можно использовать принцип фасетности – один из основных принципов, используемых при композиции профессионально разрабатываемых тестовых заданий. Фасетом называют набор сменных элементов задания [1]. При автоматизированном тестировании вместо каждого фасета подставляют значение из заданного диапазона и таким образом получают сразу несколько вариантов одного и того же задания. Рассмотрим пример задачи с одним фасетом.

Задача. Во сколько раз увеличится объем конуса, если радиус его основания увеличится в {k } раз, а высота останется прежней?

Вариаций значений элементов фасета очень велико. Так, в едином банке заданий ЕГЭ встречаются многочисленные клоны этой задачи со значением *k* равным 3; 4,5; 40; 26 и др. [7]. Заметим, что все же не все клоны имеют одинаковую трудность. Первая задача решается устно, а возведение в квадрат десятичной дроби занимает у учеников намного больше времени (да и ошибок гораздо больше), а потому задача, составленная при значении k =4,5, воспринимается учениками как более трудная.

В одной задаче может быть не один, а несколько фасетов. Число фасетов варьируется в зависимости от богатства содержания задания. Максимально возможное число вариантов задания находится перемножением числа элементов во всех фасетах. По мере увеличения количества фасетов и элементов в них растет и число вариантов задания.

Рассмотрим, пример, многофасетной задачи.

Задача. Объем цилиндра равен 1 см3. Радиус основания {увеличили, уменьшили} в {2,3,4,5,6,7,8,9,10} раза, а высоту {увеличили, уменьшили} в {2,3,4,5,6,7,8,9,10} раз(а). Найдите объем получившегося цилиндра.

В задаче имеется 4 фасета (представленные элементами в фигурных скобках),позволяющих в машинном варианте подставить любые комбинации допустимых значений. Четыре фасета в данной задаче позволяют создать 324 вариантов заданий для контроля знаний данной учебной единицы, что вычисляется перемножением числа элементов в каждом фасете: 2 х 9 х 2 х 9 = 324. Заметим, что не все варианты данной задачи будут равноценны по трудности: при решении одних находят произведение однозначных чисел (решение находится устно и очень быстро), а при решении других приходится умножать двузначное число на однозначное. Если выявляется принципиальное различие трудности отдельных вариантов задания, то такие элементы из фасета исключаются.

В рассмотренных выше примерах предусматривался произвольный выбор элементов из фасетов, т. е. выбор элемента из одного фасета не влиял на выбор элементов других фасетов.

Рассмотрим задачу. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше $\{n\}$ пассажиров, равна $\{h\}$.

Вероятность того, что окажется меньше$\{m\}$ пассажиров, равна $\{t\}$. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от m до n-1.

В этой задаче четыре варьируемых величины. Однако значения этих величин взаимозависимы, что необходимо учесть при ее клонировании. Область допустимых значений величин определяются условием задачи: величины n и m принимают натуральные значения, их ограниченность - связана с сюжетом задачи (в частности, вместимостью автобуса). Значение величины n должны быть больше значения m. Область допустимых значений величин вероятностей - десятичные дроби от 0 до 1, причем значение h должны быть больше значения t. При решении данной задачи необходимо найти разность десятичных дробей, поэтому подбор числовых значений не составляет труда.

В задачах с более сложной структурой, более длительными вычислениями, с более трудным математическим аппаратом составление задач-клонов может оказаться намного более трудоемким делом.

Рассмотрим еще одну задачу. Моторная лодка прошла против течения реки $\{s\}$ км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на $\{t\}$ часов меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна $\{v\}$ км/ч.

В этой задаче имеется 3 фасета. Не любые комбинации значений приведут к технически равным по трудности задачам, и не при любых значениях переменной задача имеет решение. При разработке задания необходимо подобрать комбинации значений. Для этого составителю приходится решить задачу сначала в общем виде, исследовать особенности получившей формулы, подобрать значения параметров.

Например, комбинация {112, 6,11} определяет задачу: Моторная лодка прошла против течения реки 112 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 11 км/ч. Задачи-клоны с наборами: {221,4,15}, {195,2,14} {160,6,13} будут в техническом плане близкими ей по трудности.

Подведем итог вышесказанному. Задачи-клоны - задачи, одинаковые по сложности, способу решения, теоретическому базису, равноценные или близкие по трудности. Различия условий задач-клонов не касается характера взаимосвязей, отношений между величинами, объектами данными в условии. Задачи-клоны отличаются друг от друга числовыми данными, обозначениями, расположением объектов, наименованием нематематических объектов задачи. Основными приемами получения математических задач-клонов являются: варьирование числовых данных, обозначений, расположений объектов, изменения нематематических объектов в сюжете задачи. При использовании этих приемов для составления задач-клонов необходимо учитывать содержательные особенности учебного материала. Варьирование не должно приводить к серьезному техническому усложнению (упрощению) задачи, к частному случаю, к изменению теоретической основы решения.

Умение составлять задачи-клоны – необходимое профессиональное умение современного учителя математики. Потому на занятиях по теории и методике обучения математике должна проводиться целенаправленная работа по формированию данного умения у студентов педагогического направления.

Работа выполнена в рамках Федерального задания Минобрнауки России «Видовое многообразие задачных конструкций продуктивного обучения математике» (регистрационный номер 01201458168)

Список литературы

1. Аванесов В. Содержание теста и тестовых заданий // Педагогические измерения. –2007. –№3. – С.3-36.
2. Алексеева С.В. Углубленное изучение курса геометрии 8-9 классов средней школы на основе внутриклассной дифференциации: Дис. ... канд. пед. наук. - Арзамас, 1998. - 250 с.
3. Звавич Л.И., Потоскуев Е.В. О геометрической составляющей ЕГЭ по математике// Математика в школе. – 2012. – №1. – С.20-26.
4. Зайкин М.И., Арюткина С.В., Зайкин Р.М. Цепочки, циклы и системы математических задач: Монография / Под общей ред. М.И. Зайкина, Арзамасский филиал ННГУ. – Арзамас: АГПИ, 2013. – 135с.
5. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. Ч.I. - М.: Просвещение, 1977. –110с.
6. Столяр А.А. Педагогика математики. –Минск: Вышейшая школа,1986. - 414с.
7. Открытый банк заданий ЕГЭ [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://mathege.ru. (дата обращения 6.06.14)
8. Хрестоматия по методике математики: Обучение через задачи / Сост. М.И. Зайкин, С.В. Арюткина. – Арзамас, 2005. –Т.1, 300с.

Рецензенты:

Зайкин М.И., д.п.н., профессор, заведующий кафедрой математики, теории и методики обучения математике, Арзамасского филиала ННГУ, г.Арзамас.

Фролов И.В., д.п.н., профессор, заведующий кафедрой физики, теории и методики обучения физике Арзамасского филиала ННГУ, г.Арзамас.